

## Modelltheorie

### Blatt 4

Abgabe: 21.11.2022, 17 Uhr

#### Aufgabe 1 (10 Punkte).

Die Kollektion der nach oben unbeschränkten Intervalle  $\{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$  ist die Basis einer Topologie auf  $\mathbb{R}$ . Diese Topologie wird  $T_\infty$  genannt.

- Erfüllt die Topologie  $T_\infty$  das Trennungssaxiom  $T_1$ ? Ist sie hausdorffsch?
- Gibt es isolierte Punkte in  $T_\infty$ ?
- Beschreibe alle Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , die offen-abgeschlossen sind. Ist die Topologie 0-dimensional?
- Besitzt  $T_\infty$  eine abzählbare Basis?
- Ist  $\mathbb{R}$  mit dieser Topologie kompakt?
- Betrachte das Intervall  $[0, 1]$ . Was sind die Häufungspunkte dieser Menge?
- Nun betrachte  $\mathbb{R}$  zusätzlich als topologischen Raum bezüglich der euklidischen Topologie  $T_{eukl}$  (bekannt aus Analysis). Dann sei  $f : (\mathbb{R}, T_{eukl}) \rightarrow (\mathbb{R}, T_\infty)$  die Abbildung  $x \mapsto x$ .  
Zeige, dass  $f$  stetig, aber weder offen noch abgeschlossen ist.

**Aufgabe 2** (6 Punkte). In der Sprache  $\mathcal{L} = \{E\}$  mit einem zweistelligen Relationszeichen  $E$  betrachte die Theorie  $T$  welche besagt, dass die Interpretation von  $E$  eine Äquivalenzrelation mit genau zwei unendlichen (und keinen endlichen) Klassen ist.

- Zeige, dass  $T$  vollständig mit Quantorenelimination ist (nach Hinzufügen eines Konstantenzeichens).
- Sei  $\mathcal{M} \models T$  ein abzählbares Modell. Beschreibe (informell) alle 1-Typen über  $M$ , d.h. alle Elemente von  $S_1^{\mathcal{M}}(M)$ .  
Welche Typen sind realisiert? Was sind die isolierten Typen?

#### Aufgabe 3 (4 Punkte).

Sei  $\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $A \subset B \subset M$ . Betrachte die Abbildung  $\text{restr} : S_n^{\mathcal{M}}(B) \rightarrow S_n^{\mathcal{M}}(A)$ , welche durch Einschränkung gegeben wird: Für  $\bar{a}$  aus  $A$  und eine  $\mathcal{L}$ -Formel  $\phi(\bar{x}, \bar{y})$  liegt  $\phi(\bar{x}, \bar{a})$  in  $\text{restr}(p)$ , falls  $\phi(\bar{x}, \bar{a})$  (als  $B$ -Instanz betrachtet) in  $p$  liegt.

- Zeige, dass  $\text{restr}$  wohldefiniert ist.
- Zeige, dass die Abbildung  $\text{restr}$  stetig und abgeschlossen ist.